Théorème du point fixe de Brouwer

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 214 : Théorème d'inverse locale, théorèmes des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.
- 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Toute application de classe C^1 de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ dans elle-même admet un point fixe.*

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe $f : B \to B$ de classe C^1 sans point fixe.

Étape 1 : Montrons qu'il existe $\varphi : B \to S = \partial B$ de classe C^1 telle que $\varphi_{|S} = \mathrm{id}_{|S}$

Pour $x \in B$, notons $\varphi(x)$ le point d'intesection de la demi-droite $[f(x), x)$ et S, $\varphi(x)$ est de la forme $\varphi(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ avec $\lambda(x) \geq 0$ et vérifie

$$\begin{aligned}
&||f(x) + \lambda(x)(x - f(x))||^2 = 1 \\
&\iff ||x - f(x)||^2 \lambda(x)^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + (||f(x)||^2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

Posons $\Delta(x) = \langle f(x), x - f(x)\rangle^2 + \underbrace{||x - f(x)||^2}_{>0}(1 - ||f(x)||^2) > 0$.

D'où $\lambda(x) = -\frac{\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{||x - f(x)||^2}$ donc λ est de classe C^1 et φ est de classe C^1 et par construction on a $\varphi_{|S} = \mathrm{id}_{|S}$

Étape 2 : Construisons une fonction volume

Posons $\begin{array}{cccc} F & : & B \times [0,1] & \to & B \\ & & (x,t) & \mapsto & (1-t)x + t\varphi(x) \end{array}$.

On a en particulier $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_B$ et $F(\cdot, 1) = \varphi$ et pour $x \in S, t \in [0,1]$, on a $F(x,t) = x$.
Pour $t \in [0,1]$, posons $V(t) = \int_{\mathring{B}} \det \partial_1 F(x,t) \,\mathrm{d}x$ qui est polynomiale avec $F(x,1) = \varphi(x)$ qui n'est pas différentielle inversible en tout point de $\mathring{B}$.
En effet, comme $||\varphi(x)||^2 = 1$, en différentiant on a $\forall h \in \mathbb{R}^d, x \in \mathring{B}, \langle \varphi(x), \mathrm{d}\varphi(x) \cdot h\rangle = 0$ d'où $\mathrm{Im}(\mathrm{d}\varphi(x)) \subset \{\varphi(x)\}^\perp$. Or, comme $\varphi(x) \neq 0$, on a $\mathrm{d}\varphi(x)$ non inversible (de rang $< d$). D'où $V(1) = 0$.

Étape 3 : Montrons que pour t assez petit $x \mapsto \det \partial_1 F(x,t)$ est strictement positive et injective.

Par l'absurde, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in]0, \frac{1}{n}]$ et $x_n \in B$ telle que $\det \partial_1 F(x_n, t_n) \leq 0$. Par propriété de Bolzano-Weierstrass, il existe $x \in B$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. Par continuité de $\partial_1 F$ et de det, en passant à la limite, on a $\det \partial_1 F(x, 0) \leq 0$. Absurde car $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t < \frac{1}{N}$ et $x \in B$ on a $\det \partial_1 F(x,t) > 0$.
Ainsi, par théorème d'inversion locale, on a $F(\mathring{B}, t)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Montrons que $F(\cdot, t)$ est injective pour t assez petit,
Soit $t < \frac{1}{N}$ et $x, y \in B$, si $F(x,t) = F(y,t)$ alors par inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}(1-t)||x-y|| &= t||\varphi(x) - \varphi(y)|| \\ &\leq tM||x-y||\end{aligned}$$

avec $M = \sup_{z \in B} |||\mathrm{d}\varphi(z)|||$.
Donc $||x-y|| \leq \frac{Mt}{1-t}||x-y||$ il existe donc $\alpha < \frac{1}{N}$ tel que pour tout $t \leq \alpha$, on ait $\frac{Mt}{1-t} < 1$ donc pour $t < \alpha$, $F(\cdot, t)$ est injective.

Étape 4 : Conclusion

Pour $t < \alpha$, comme pour $x \in S$, $F(x,t) = x$ donc $F(\mathring{B}, t) \cup S = F(B,t)$ qui est compact donc fermé, d'où en passant au complémentaire $F(\mathring{B}, t) = F(B,t) \cap \mathring{B}$ fermé dans $\mathring{B}$.
Or, par théorème d'inversion locale, $F(\mathring{B}, t)$ est ouvert donc par connexité, $F(\mathring{B}, t) = \mathring{B}$.
Ainsi pour $t < \alpha$,

$$\begin{aligned}V(t) = \int_{\mathring{B}} \det \partial_1 F(x,t) \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathring{B}} |\det \partial_1 F(x,t)| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathring{B}} \mathrm{d}\lambda_d \\ &= \lambda(\mathring{B})\end{aligned}$$

donc cette fonction polynomiale est constante sur un intervalle non vide donc constante, donc elle est constante égale à cette valeur sur $[0,1]$. Or, comme $V(1) = 0 \neq \lambda(\mathring{B})$.
Absurde, f admet un point fixe. $\square$

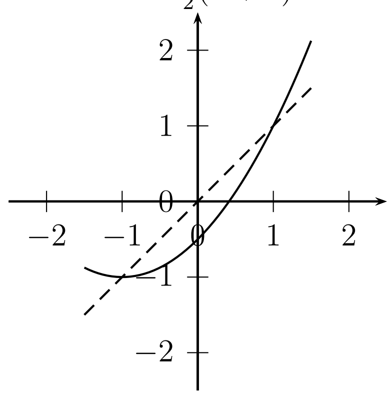
Annexe

Théorème. *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ dans elle-même admet un point fixe.*

Preuve : Comme B est compacte, soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B$, $||f(x) - x|| > \varepsilon$.
Par théorème de Stone-Weierstrass, il existe $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de coordonnées polynomiales telle que $||f - P||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour tout $x \in B$, on a $||P(x)|| \leq ||P(x) - f(x)|| + ||f(x)|| < \frac{\varepsilon}{2} + 1$.
D'où $\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} P$ est polynomiale, C^1 et vérifie $Q(B) \subset B$.
Pour tout $x \in B$, $||Q(x) - f(x)|| \leq ||Q(x) - P(x)|| + ||P(x) - f(x)|| \leq \left(1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) ||P(x)|| + \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où $||Q(x) - x|| \geq ||f(x) - x|| - ||Q(x) - f(x)|| > 0$ donc Q n'admet pas de point fixe. $\square$

Contre-exemples :

— Si la boule est ouverte : $\begin{array}{cccc} f & : &]-1,1[& \to &]-1,1[\\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 \end{array}$ n'admet pas de point fixe.



— Si la dimension est infinie, pour $H = l^2(\mathbb{Z})$, (e_n) sa base hilbertienne usuelle, en considérant l'application $\begin{array}{cccc} T & : & H & \to & H \\ & & (x_n) & \mapsto & (1 - ||x||)e_0 + U(x) \end{array}$ avec U l'opérateur de Shift : $U : (x_n) \mapsto (x_{n+1})$.
On a $\forall x \in \mathrm{B}_H(0,1), ||T(x)|| \leq |1 - ||x||| + ||x|| = 1$ mais T n'admet pas de point fixe, en effet, pour $x \in \mathrm{B}_H(0,1)$, $T(x) = x \iff \begin{cases} x_0 & = 1 - ||x|| + x_{-1} \\ x_n & = x_{n-1} \quad \text{si } n \neq 0 \end{cases}$.
D'où $\begin{cases} x_n & = x_0 \quad \text{si } n \geq 0 \\ x_n & = x_{-1} \quad \text{sinon} \end{cases}$.
Or, $x \in H$, $x_0 = x_{-1} = 0$ donc $x = 0$ ce qui est impossible car $x_0 = 1 - ||x|| + x_{-1}$.

Références

[1] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel.* Ellipses, 1998.